**Завдання для районних етапів міського турніру юних математиків.**

**1. «Спiльний ортоцентр»**

На гiпотенузi AB прямокутного трикутника ABC вiдмiтили точки K i N. Доведiть, що ортоцентри трикутникiв BCK i ACN збiгаються тодi й тiльки тодi, коли BN AK = tg2 A.

**2. «Сума послiдовних чисел Фiбоначчi»**

Послiдовнiсть {un} ∞ n=1, в якiй u1 = u2 = 1, un+1 = un + un−1, n > 2, називається послiдовнiстю чисел Фiбоначчi. Якi ви зможете знайти нату- ральнi числа m > 1 такi, що сума будь-яких m послiдовних чисел Фiбоначчi дiлиться без остачi на m?

**3. «Видовищнiсть турнiру»**

У футбольному турнiрi «на вилiт» грає 2 n команд з рiвнями гри, позначе- ними натуральними числами вiд 1 до 2 n (усi команди мають рiзний рiвень гри; матч мiж двома командами завжди виграє команда з бiльшим рiвнем гри). Спершу команди розбивають на 2 n−1 пар, i цi пари грають мiж собою, потiм 2 n−1 переможцiв розбивають на 2 n−2 пар, якi грають мiж собою, i т. д., поки не залишиться лише одна команда — переможець турнiру. Видовищнiстю матчу мiж двома командами назвемо модуль рiзницi рiвнiв цих команд, видовищнiстю турнiру назвемо суму видовищностей усiх проведених iгор. Для заданого натурального n > 2 знайдiть найменше та найбiльше можливе значення видовищностi турнiру.

**4. «Деформованi числа»**

Назвемо натуральне число таким, що деформується, якщо його запис у заданiй системi числення не закiнчується нулем та в цьому записi можна викреслити цифру, яка не є анi першою, анi останньою, так, щоб початкове число без остачi дiлилося на отримане число. 6.1. В яких системах числення немає чисел, що деформуються? 6.2. Чи iснує така система числення, в якiй безлiч чисел, що деформую- ться? 6.3. Чи iснує таке число, яке в десятковiй системi числення можна дефор- мувати двiчi поспiль?

**5. «Точки на прямiй»**

Андрiйко та Миколка грають у таку гру. Андрiйко вибирає 2016 точок на промiжку (0; +∞). Миколка довiльно фарбує кожну з них синiм або зеленим кольором. Пiсля цього Андрiйко вибирає додатне число a i фарбує всi промiжки ((2n − 2)a; (2n − 1)a), n ∈ N, у синiй колiр, а всi промiжки ((2n − 1)a; 2na), n ∈ N, — у зелений. Якщо кожна з вибраних на початку гри Андрiйком точок належатиме iнтервалу такого ж самого кольору, то Андрiйко вважатиметься переможцем. В iншому випадку переможцем буде Миколка. Чи може хтось iз гравцiв забезпечити собi перемогу?

**6. «Показникове рiвняння в натуральних числах»**

Розв’яжiть у натуральних числах x, y i z рiвняння 1 + 2x + 2x+y = 5z .

**7. «Рiвняння з коренями»**

Розв’яжiть у цiлих числах x i y рiвняння p x 3 − 3xy2 + 2y 3 = √3 13x + 8.

**8. «Числова таблиця»**

Чи можна заповнити цiлими числами таблицю 6 × 6 так, щоб сума всiх чисел у кожному квадратi 3 × 3 цiєї таблицi дорiвнювала 2016, а сума всiх чисел у кожному квадратi 5 × 5 дорiвнювала 2015? Таке ж саме питання для таблицi 7 × 7.

**9. «Знову вiдновлюємо трикутник»**

За допомогою лише циркуля та лiнiйки вiдновiть трикутник ABC за такими трьома точками: точкою M перетину його медiан, точкою I — центром його вписаного кола i точкою Qa дотику вписаного кола до сторони BC.

**10. «Буратiно та музичне казино»**

На Полi Чудес у Країнi Дурнiв Буратiно заробив 2016 золотих i вирiшив запросити до корчми «Три пiчкурi» своїх давнiх знайомих — Карабаса Барабаса й Дуремара. Карабас Барабас запропонував йому зiграти в музичне казино з виконанням N пiсень. Перед кожною з пiсень Буратiно ставить якусь кiлькiсть золотих на кiн i намагається вголос угадати, хто заспiває наступну пiсню: Карабас Барабас або ж Дуремар (обидва вони чують прогноз Буратiно i пiсля цього обирають, хто саме буде спiвати). Якщо Буратiно вгадує, то поставлена сума подвоюється i повертається Буратiно. В iншому випадку Карабас Барабас та Дуремар залишають її собi. Умовою гри передбачено, що Дуремар спiватиме бiльше пiсень, анiж Карабас Барабас. Який найбiльший гарантований виграш може забезпечити собi Буратiно, якщо: а) N = 3; б ) N = 5?