

**V Міський турнір юних математиків, 2010 рік**  
**Завдання для математичного бою (4)**

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,9 \\ y + [z] + \{x\} = 3,5 \\ z + [x] + \{y\} = 2 \end{cases}$$

(где  $[a]$  и  $\{a\}$  обозначают целую и дробную часть числа  $a$  соответственно).

2. Три числа, сумма которых равна 57, образуют арифметическую прогрессию. Если второе число уменьшить на 1, третье увеличить на 1, а первое не изменять, то новые три числа будут образовывать геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

3. В окружность радиуса 6 см с центром в точке  $O$  вписан четырёхугольник  $ABCD$ . Его диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны друг другу. Пусть точки  $E$  и  $F$  – середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  соответственно, а  $K$  – точка пересечения  $AC$  и  $BD$ . Известно, что  $OK = 5$  см, а площадь четырёхугольника  $OЕКF$  равна  $12 \text{ см}^2$ . Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ .

4. Имеется 4 яблока массой 600, 400, 300 и 250 г. Вася и Петя берут яблоки и начинают есть. Следующее яблоко разрешается взять только тогда, когда доедено предыдущее (при этом взять можно любое ещё не взятое яблоко). Скорость поедания (количество съеденных грамм в секунду) у мальчиков одинакова. Вася имеет право выбора первого яблока. Какие яблоки должны брать мальчики, если каждый хочет съесть побольше? (Описать оптимальную стратегию для каждого).

5. Действительные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$ , не все равные между собой, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = k \\ y + \frac{1}{z} = k \\ z + \frac{1}{x} = k. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения  $k$ .

6. Докажите, что ни при каком натуральном  $n$  число  $n^2 + 3n + 5$  не делится нацело на 121.