Додаток до листа
Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОНМС України
№ 1.4/18-760 від 15.03.2011 р.

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

XIV ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ
ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

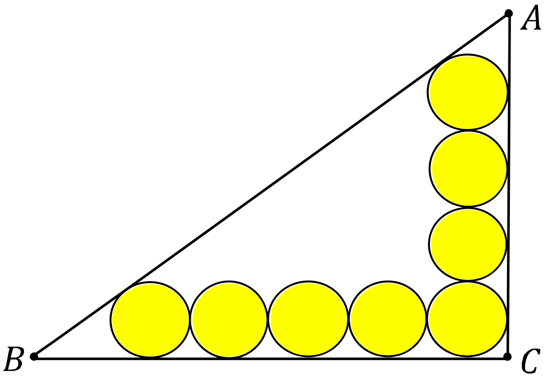
Завдання для відбірних етапів турніру*

Дорогі друзі — юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. «***Найменше значення***». Знайдіть усі такі трійки натуральних чисел a, b і c, для яких вираз $\frac{1024}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{2}$ набуває свого найменшого значення.

2. «***Ланцюжок кіл***». Вісім кіл радіуса r розташовані в прямокутному трикутнику ABC (кут C — прямий) так, як зображено на рисунку (кожне з кіл дотикається до відповідних сторін трикутника та інших кіл). Знайдіть радіус вписаного кола трикутника ABC.



3. «***Числові конструкції та суми кубів і квадратів***». *а*) Доведіть, що для будь-якого натурального $k \geq 2$ існує таке натуральне число, яке можна подати у вигляді суми 2, 3, … , k кубів натуральних чисел.

б) Доведіть, що для будь-якого натурального $n \geq 3$ існує таке натуральне число, куб якого можна подати у вигляді суми кубів n попарно різних натуральних чисел.

---

* Для проведення шкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

в) Доведіть, що для будь-якого натурального n існує таке натуральне число, квадрат якого можна подати у вигляді суми 2, 3, … , n квадратів попарно різних натуральних чисел.

4. «***Біноміальні коефіцієнти та системи числення***». *а*) Як за розкладами натуральних чисел n і m у двійковій системі числення визначити, чи є біноміальний коефіцієнт C_n^m парним числом? *б*) Як за розкладами натуральних чисел n і m у двійковій системі числення визначити показник *найбільшого* степеня числа 2, на який ділиться без остачі біноміальний коефіцієнт C_n^m?

5. «***Ковзаюче коло***». Коло ω_0 дотикається до прямої у точці A. Нехай R — задане додатне число. Розглядаються всілякі кола ω радіуса R, які дотикаються до прямої та мають з колом ω_0 дві різні спільні точки. Точку дотику кола ω з прямою позначимо через D, а точки перетину кіл ω та ω_0 — через B і C (вважаємо, що відстань від точки B до прямої більше за відстань від точки C до цієї прямої). Знайдіть геометричне місце центрів описаних кіл усіх таких трикутників ABD.

6. «***Функціональні рівняння***». Знайдіть усі такі функції $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, що для всіх дійсних x і y виконується рівність:

а) $f\left(f(x)+y^2\right)=x+y^2$;

б) $f\left(f\left(f(x)\right)+y\right)=x+y$.

7. «***Складна нерівність***». Нехай задано три набори довільних дійсних чисел:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n),\ (b_1, b_2, \dots, b_n),\ (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Доведіть, що має місце нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^3 \le \frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4+\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4+\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4+\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right).$$

8. «***Намисто симетричних нерівностей***». Для нерівних додатних дійсних чисел x і y доведіть такі нерівності:

а) $\dfrac{8}{(x+y)^2}\le\dfrac{2}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{2xy}$;

б) $\dfrac{18}{(x+y)^4}\le\dfrac{2}{(x-y)^4}+\dfrac{1}{x^3y+xy^3}$;

в) $\dfrac{16}{(x+y)^6}\le\dfrac{4}{(x-y)^6}+\dfrac{1}{3x^5y+10x^3y^3+3xy^5}$.

Для кожної з нерівностей знайдіть усі пари додатних чисел x і y, $x \neq y$, для яких досягається рівність.

9. «***Несподівані точні квадрати***». Доведіть, що існує така трійка натуральних чисел a, b і c, що кожне з чисел $a+b+c$, $ab+bc+ca$, $a^2+b^2+c^2$ та abc є точний квадрат. Дослідіть питання щодо скінченності чи нескінченності множини всіх таких трійок (вважаємо, що числа одної трійки не можуть бути отримані множенням відповідних чисел іншої трійки на одне й те саме число).

10. «***Вага многочлена***». *Вагою* $\mu\left[P(x)\right]$ відмінного від константи многочлена $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, записаного в *стандартному вигляді* — тобто у вигляді $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$, де $a_n \neq 0$, — будемо називати суму квадратів усіх його коефіцієнтів: $\mu\left[P(x)\right]=a_n^2+a_{n-1}^2+...+a_1^2+a_0^2$.

Нехай $Q(x)=3x^2+7x+2$. Знайдіть принаймні один такий многочлен $P(x)$, що $P(0)=1$, і для будь-якого натурального числа m виконується рівність

$$\mu\left[\left(P(x)\right)^m\right]=\mu\left[\left(Q(x)\right)^m\right].$$

11. **«*Бісектриса та висоти*».** Нехай висоти BB_1 і CC_1 гострокутного трикутника ABC перетинають його бісектрису AL у двох різних точках P і Q відповідно. Позначимо через F таку точку, що PF AB та QF BC, а через T — точку перетину дотичних, проведених у точках B і C до описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що точки A, F і T лежать на одній прямій.

12. «***Циклічна система рівнянь***». Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{3x-y}{x-3y}=x^2, \\ \dfrac{3y-z}{y-3z}=y^2, \\ \dfrac{3z-x}{z-3x}=z^2. \end{cases}$$

13. «***Дробові частини***». Нехай $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x, $\{x\}=x-[x]$.

а) Доведіть, що існує число $\lambda>0$, яке задовольняє такі три умови:

$$\frac{1}{10}<\{\lambda\}<\frac{9}{10},\ \{\lambda^2\}<\frac{1}{10^6},\ \{\lambda^3\}<\frac{1}{10^6}.$$

б) Чи може таке число λ належати проміжку $(0;5)$?

14. «***Вписаний чотирикутник***». Дано вписаний у коло ω чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = AD$, $CB = CD$. Візьмемо точку $P \in \omega$. Нехай вершини чотирикутника $Q_1Q_2Q_3Q_4$ симетричні точці P відносно прямих AB, BC, CD і DA відповідно.

а) Доведіть, що точки, симетричні точці P відносно прямих Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4 і Q_4Q_1, лежать на одній прямій.

б) Доведіть, що коли точка P рухається по колу ω, то всі такі прямі проходять через одну спільну точку.

15. «***Розбиття на групи***». Задано деяку послідовність натуральних чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, у якій кожне натуральне число зустрічається рівно один раз (тобто для кожного натурального числа s існує рівно одне $p \in \mathbf{N}$ таке, що $a_p = s$).

а) Чи завжди знайдеться таке m, що в множині $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ існує підмножина, сума елементів якої дорівнює $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{2}$?

б) Таке ж саме питання, якщо в заданій послідовності для всіх натуральних k виконується нерівність $a_k \le k^2$.

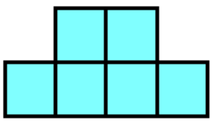
16. «***Перерізи многогранників***». Дослідіть питання щодо найбільшої кількості сторін многокутників, які можна отримати в перерізі площиною:

а) правильних многогранників;

б) опуклих октаедрів, які не є правильними (тут ми вважаємо *опуклим октаедром* будь-який опуклий многогранник з 8 трикутними гранями, 12 ребрами та 6 вершинами, з кожної з яких виходить по 4 ребра).

Чи існує такий опуклий n-гранник, що будь-який многокутник, отриманий у його перерізі площиною, має не більше за $n/10$ сторін?

17. **«*Розрізання шахівниць*»**. Дослідіть питання щодо умов (необхідних та/або достатніх), за яких клітчасті прямокутники можна розрізати по лініях сітки на фігурки, кожна з яких є або клітчастим квадратом розміру 2×2, або шестиклітинковим поліміно вигляду



в довільній орієнтації (з повертаннями та перегортаннями).

Матеріали для проведення відбірних етапів турніру підготували:
Н. І. Бєлухов, В. О. Борисова, Р. А. Заторський, О. В. Карлюченко, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, Д. Ю. Мітін, М. О. Перестюк, О. Н. Нестеренко, В. В. Плахотник, К. В. Рабець, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, О. Ю. Теплінський, О. К. Толпиго, І. В. Федак, А. В. Чайковський, В. А. Ясінський.

Web-сторінка Всеукраїнського турніру юних математиків: `www.ukrtym.blogspot.com`.