



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ДЕРЖАВНА НАУКОВА УСТАНОВА
«ІНСТИТУТ МОДЕРНІЗАЦІЇ ЗМІСТУ ОСВІТИ»**

вул. Митрополита Василя Липківського, 36, м. Київ, 03035, тел./факс: (044) 248-25-13

Від 09.06.2017 № 21. 1/10-1049

На № _____ від _____

Ректорам (директорам) інститутів
післядипломної педагогічної освіти

*Про проведення фінального етапу
XX Всеукраїнського турніру
юних математиків імені М. Й. Ядренка*

Повідомляємо, що фінальний етап XX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка планується провести в жовтні-листопаді 2017 року.

Турнір буде проведено відповідно до вимог Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності (зі змінами), затвердженого наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 № 1009, зареєстрованого в Міністерстві юстиції України 17.11.2011 за № 1318/20056.

Отримати інформацію щодо умов участі у фінальному етапі XX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка можна за тел. 066 8479750 (Гунько Лілія Вікторівна) та на офіційній веб-сторінці ТЮМу www.ukrtym.blogspot.com.

Завдання, що пропонуються для I етапу турніру (міжшкільних, районних, міських, обласних змагань), додаються.

В.о. директора

Ю.І.Завалевський

Гунько Л. В.

(044) 248 60 70

XX ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

Завдання для відбіркового етапу турніру*

Дорогі друзі — юні шанувальники математики!

Пропонуємо Вам для розв'язання комплект завдань.

Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної стратегії, оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів). Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. «Будуємо трапецію»

У рівнобічній трапеції $ABCD$ з основами AD та BC діагоналі перетинаються в точці P , а прямі AB та CD — в точці Q . O_1 та O_2 — центри кіл, описаних навколо трикутників ABP та CDP , r — радіус цих кіл. Побудуйте трапецію $ABCD$ за даними відрізками O_1O_2 , PQ та радіусом r .

2. «Три дотичні»

Точки P , Q , R відмітили на сторонах BC , CA , AB відповідно. Нехай a — дотична в точці A до описаного кола трикутника AQR , b — дотична в точці B до описаного кола трикутника BPR , c — дотична в точці C до описаного кола трикутника CPQ . Нехай X — точка перетину прямих b та c , Y — точка перетину прямих c та a , Z — точка перетину прямих a та b . Доведіть, що

* За цими задачами будуть проведені чвертьфінальні та півфінальні бої фінального етапу XX Всеукраїнського турніру юних математиків. Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

прямі AX , BY , CZ перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли прямі AP , BQ , CR перетинаються в одній точці.

3. «Спільні дотичні»

У нерівнобедреному трикутнику ABC проведено висоти AH , BT , CR . На стороні BC відмітили точку P ; точки X та Y – проєкції P на AB та AC . Дві спільні зовнішні дотичні до описаних кіл трикутників XBH та HCY перетинаються в точці Q . Прямі RT та BC перетинаються в точці K .

3.1. Доведіть, що точка Q лежить на фіксованій прямій незалежно від вибору P .

3.2. Доведіть, що $KQ = QH$.

4. «Цілочисельний трикутник»

Укажіть хоча б один прямокутний трикутник ABC із цілочисельними сторонами, всередині якого можна вказати таку точку M , що довжини відрізків MA , MB , MC є цілими. Чи існує безліч таких трикутників, жодні два з яких не є подібними?

5. «Числа Фібоначчі та площі»

Послідовність Фібоначчі задається рівностями

$$F_1 = F_2 = 1, F_{k+2} = F_k + F_{k+1}, k \in N.$$

5.1. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ площа трикутника $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$ дорівнює $0,5$.

5.2. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$, $A_4(F_{m+7}; F_{m+8})$ є трапецією, площа якої дорівнює $2,5$.

5.3. Доведіть, що площа многокутника $A_1A_2\dots A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, \dots , $A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$ не залежить від вибору числа $m \geq 0$, та знайдіть цю площу.

6. «Числа Фібоначчі та Люка»

Числа Люка задаються рівностями $L_1 = 1, L_2 = 3, L_{k+2} = L_k + L_{k+1}, k \in N$. Числа Фібоначчі позначені F_k .

6.1. Для кожного $n \geq 1$ доведіть, що

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} + \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{L_{2n-1}}{L_{2n+1}} + \frac{L_{2n+1}}{L_{2n-1}} - \frac{5}{L_{2n-1}L_{2n+1}}.$$

6.2. Запропонуйте і доведіть аналогічну рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами.

7. «Система з числами Фібоначчі»

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x_1^3 + x_1 + x_2 = F_1 x_1^2 + F_3,$$

$$x_2^5 + x_2 + x_3 = F_2 x_2^4 + F_4,$$

.....

$$x_{2016}^{4033} + x_{2016} + x_{2017} = F_{2016} x_{2016}^{4032} + F_{2018},$$

$$x_{2017}^{4035} + \frac{F_{2019} - 1}{F_{2017}} x_{2017} + x_1 = F_{2017} x_{2017}^{4034} + F_{2019}.$$

8. «Рівняння з біноміальними коефіцієнтами»

Знайдіть всі натуральні числа n, k такі, що $C_{n-1}^{k+1} = C_{n+1}^{k-1}$.

9. «Сума кубів»

Знайдіть хоч одну четвірку натуральних чисел a, b, c, d таких, що $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$. Скінченною чи нескінченною є множина таких четвірок за умови, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число?

10. «Фарбуємо клітинки»

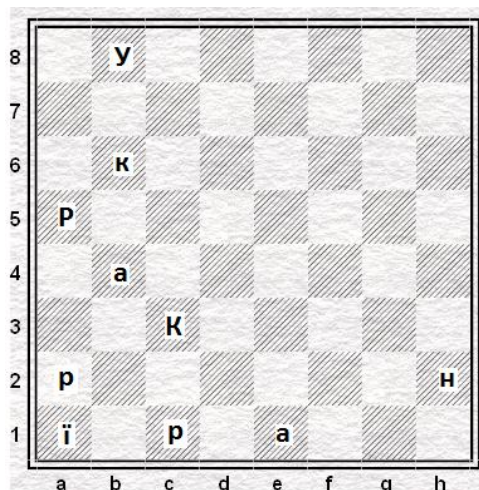
Клітинки дошки 8×8 розфарбовані в шаховому порядку. За один хід можна вибрати клітинку дошки та одночасно перефарбувати в протилежний колір усі клітинки, що мають із нею спільну сторону, при цьому сама клітинка не перефарбовується. Чи можна за декілька ходів перефарбувати в протилежний колір усі клітинки дошки?

11. «Фарбуємо паркан»

Паркан складається з 20 непофарбованих дошок. Марічка і Петрик по черзі фарбують дошки в блакитний або жовтий колір (кожен з гравців може пофарбувати будь-яку непофарбовану дошку в будь-який із двох кольорів). Починає Марічка. Вона хоче, щоб у пофарбованому паркані було якомога більше кольорових переходів, Петрик – щоб їх було якомога менше. Таким

чином, ідеал Марічки – це паркан, пофарбований у шаховому порядку (19 переходів), а ідеал Петрика – однокольоровий паркан (0 переходів). Як слід грати Марічці та Петрику, щоб кожен з них досягнув своєї мети, та яку кількість кольорових переходів матиме паркан?

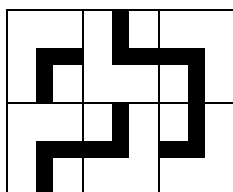
12. «Ребус Україна»



На діаграмі зображено позицію, яка могла би виникнути в шаховій партії. Різні літери позначають різні шахові фігури. Великі літери відповідають певному кольору фігури, маленькі – іншому кольору. Треба визначити цю позицію.

13. «Кутики обертаються»

У кожній комірці прямокутної таблиці $m \times n$ розташовано по одному кутику Г, Г, Г або Г, причому вершини кутиків збігаються з центрами комірок. Приклад розташування кутиків для $m = 3$, $n = 2$ зображено на рисунку.



Щосекунди всі кутики, які дотикаються бодай до одного іншого кутика, водночас повертаються на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо центра своєї комірки. Доведіть, що незалежно від розмірів таблиці та початкового розташування кутиків рано чи пізно їхній рух припиниться.

14. «Рахуємо перестановки»

Для множини $\{1, 2, \dots, n\}$ позначимо через U_k кількість її перестановок, в яких рівно k елементів залишаються на своїх місцях.

14.1. Доведіть, що $\sum_{k=1}^n kU_k = n!$. Для $n \geq 3$ доведіть нерівність

$$\frac{n!}{2} \leq \sum_{k=2}^n kU_k \leq \frac{2 \cdot n!}{3}.$$

14.2. Доведіть, що $\sum_{k=1}^n k^2 U_k = 2 \cdot n!$.

15. «Розбиття на доданки»

Доведіть, що існує таке число n , що кожне натуральне число, яке перевищує n , можна розбити на п'ять взаємно простих доданків, які більші за 1.

16. «Цікава послідовність»

Про збіжну послідовність $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$ відомо, що непарні її члени спадають, парні члени зростають і, крім того, при всіх $n \geq 1$ справджується нерівність

$$2 \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq 3.$$

Знайдіть межі, в яких може знаходитись границя цієї послідовності.

17. «Багато дільників»

Яку найбільшу кількість дільників може мати число m , якщо відомо, що воно менше за 1 000 000? (Одиниця та m також вважаються дільниками).

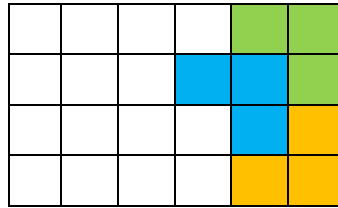
18. «Два відра фарби»

18.1. Маємо n множин, кожна з яких містить рівно 3 елементи. (Зауважимо, що елемент може належати більше ніж одній множині, але множина не може містити елемент більш ніж один раз. Деякі множини можуть співпадати.) Кожен з елементів фарбують у жовтий або блакитний колір. Знайти всі значення n , при яких обов'язково існує таке розфарбування, що жодна з множин не буде однокольковою.

18.2. Те саме завдання для множин, кожна з яких містить рівно 4 елементи.

19. «Плиточник із калькулятором»

Прямокутник розміром $4 \times 3n$ повністю без накладань покривають плиткою Г-подібної форми, яка складається з трьох плиток розміру 1×1 . Знайдіть (або оцініть) кількість варіантів покриття.



Приклад частини покриття.

20. «Безконфліктні фішки»

20.1. На деяких клітинках дошки $n \times n$ стоять фішки (не більше однієї фішки на клітинці) так, що жодні чотири фішки не знаходяться у вершинах прямокутника. Доведіть, що кількість фішок не перевищує $n(\sqrt{n} + 1)$.

20.2. Для яких n ви зможете розмістити $n(\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1)$ фішок на дошці $n \times n$ так, щоб жодні чотири фішки не стояли у вершинах прямокутника? (Тут $\lfloor x \rfloor$ позначає цілу частину числа x).

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:

І.Г. Величко, С.І. Доценко, В.М. Журавльов, Дж. Коуклі, О.Г. Кукуш, М.П. Мороз, Д.П. Мисак, І.М. Мітельман, О.Б. Панасенко, В.М. Радченко, М.М. Рожкова, П.І. Самовол, О.К. Толпиго, Г.М. Шевченко, І.В. Федак, А.М. Фролкін, Д.І. Хілько, В.А. Ясінський.