**Завдання для районних етапів**

**Харківського міського турніру юних математиків**

**(2019/2020 навчальний рік)**

Пропонуємо завдання для районних етапів міського турніру юних математиків, проведення якого планується у вересні 2019 року.

**Завдання для районних етапів**

**Харківського міського турніру юних математиків**

**(2019/2020 навчальний рік)**

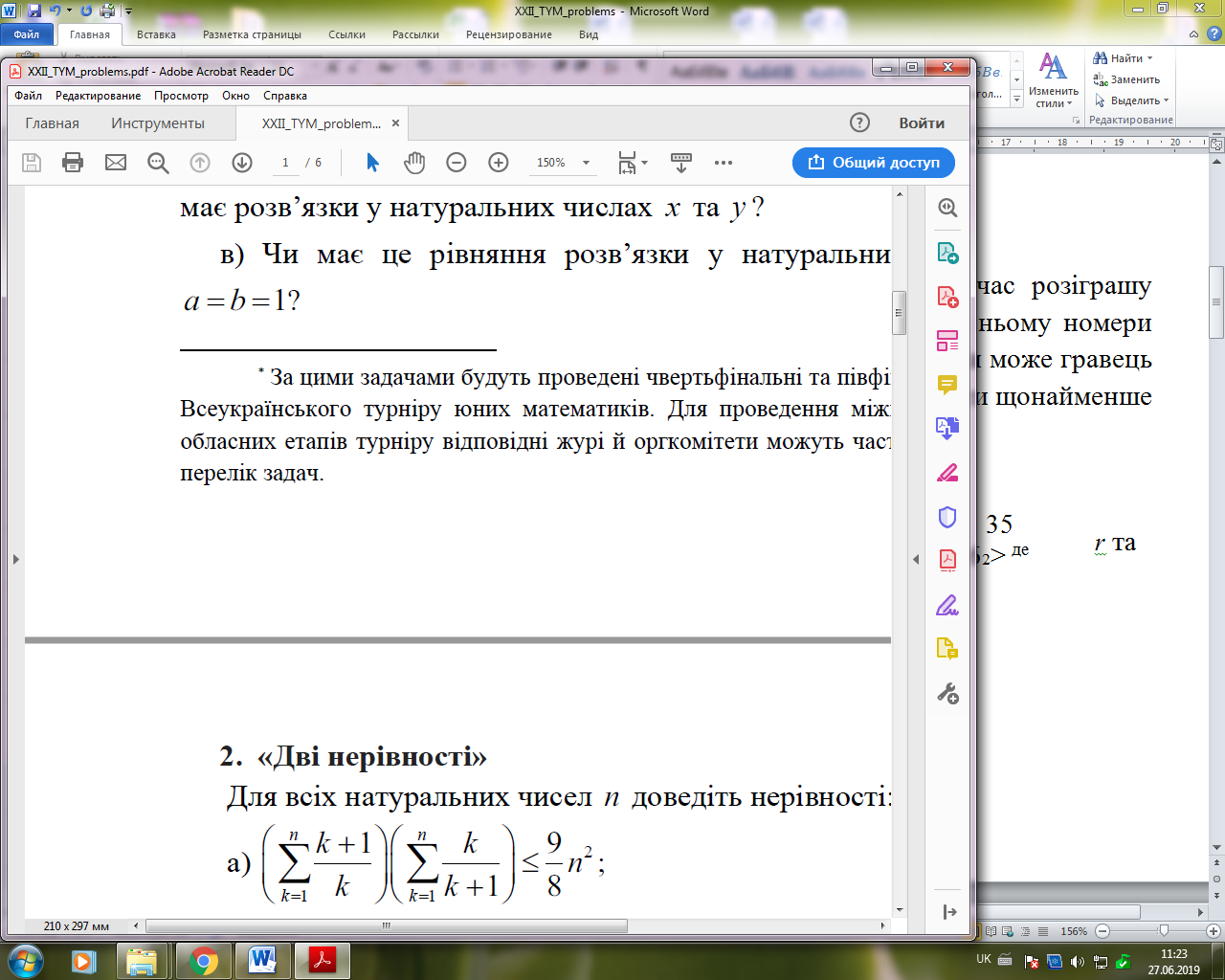
(Нумерація відповідає переліку завдань ХХІІ Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка).

1. «Діофантові рівняння»

а) Доведіть, що для довільних натуральних чисел *a* та *b* рівняння *x*2 - *xy - y*2 = *a*2 + *ab - b2* має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах *x* та *y* .

1. «Дві нерівності»

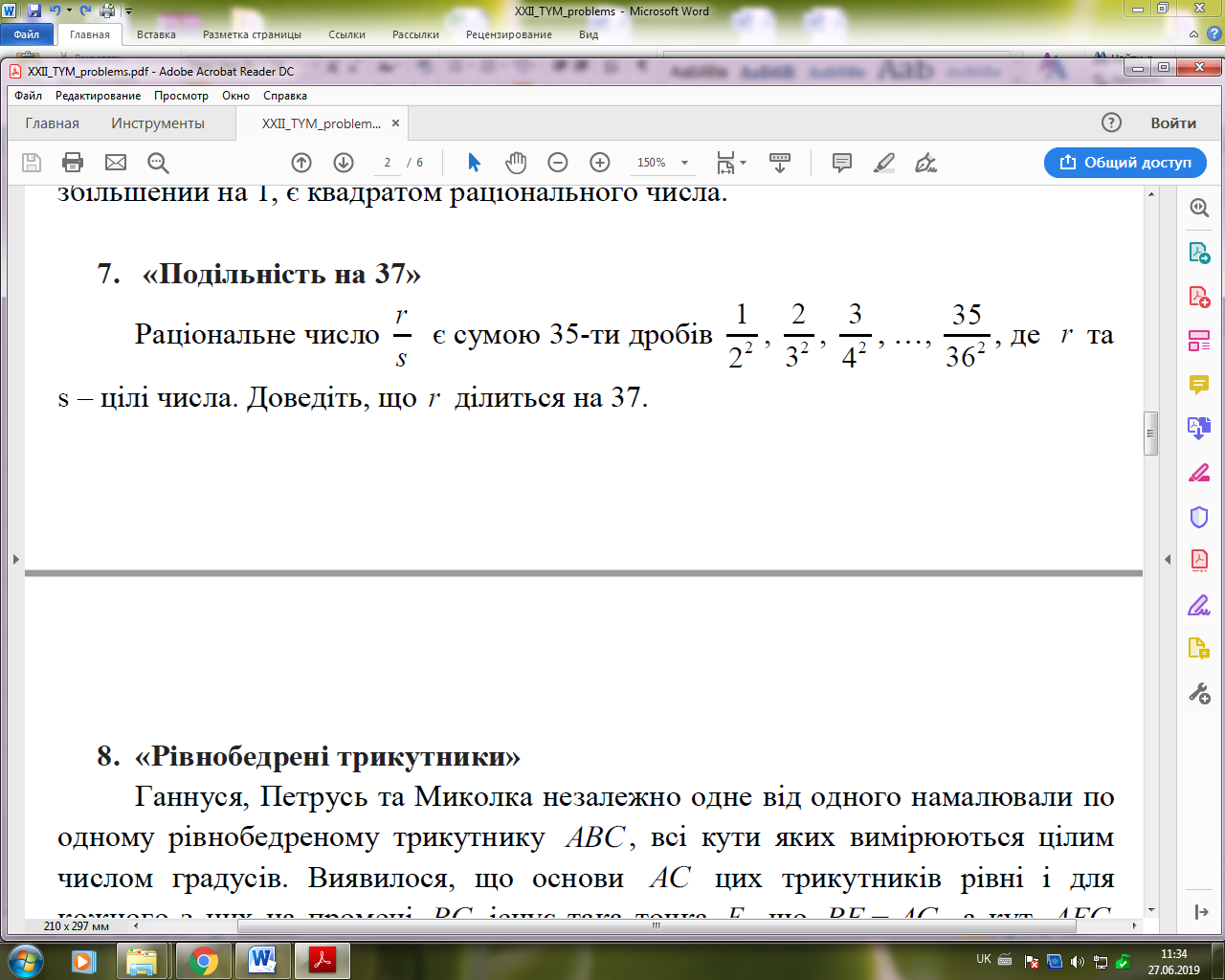
Для всіх натуральних чисел *n* доведіть нерівності:



1. «Спортлото»

У Лототроні міститься 36 занумерованих кульок. Під час розіграшу лотереї випадає шість кульок. Гравець купує білет і записує в ньому номери шести кульок, які, на його думку, випадуть під час розіграшу. Чи може гравець купити 12 білетів і гарантовано, принаймні в одному з них, вгадати щонайменше два номери?

1. «Подільність на 37»



1. «Вписані кола»

На стороні *BC* нерівнобедреного трикутника *ABC* вибрали точку *D* і в кожен із трикутників *ABD* та *ACD* вписали коло. Потім усе витерли, залишивши лише два кола. Відомо, з якого боку від їхньої лінії центрів розташована вершина *A* . За допомогою циркуля і лінійки відновіть трикутник *ABC*, якщо ми знаємо, що в ньому:

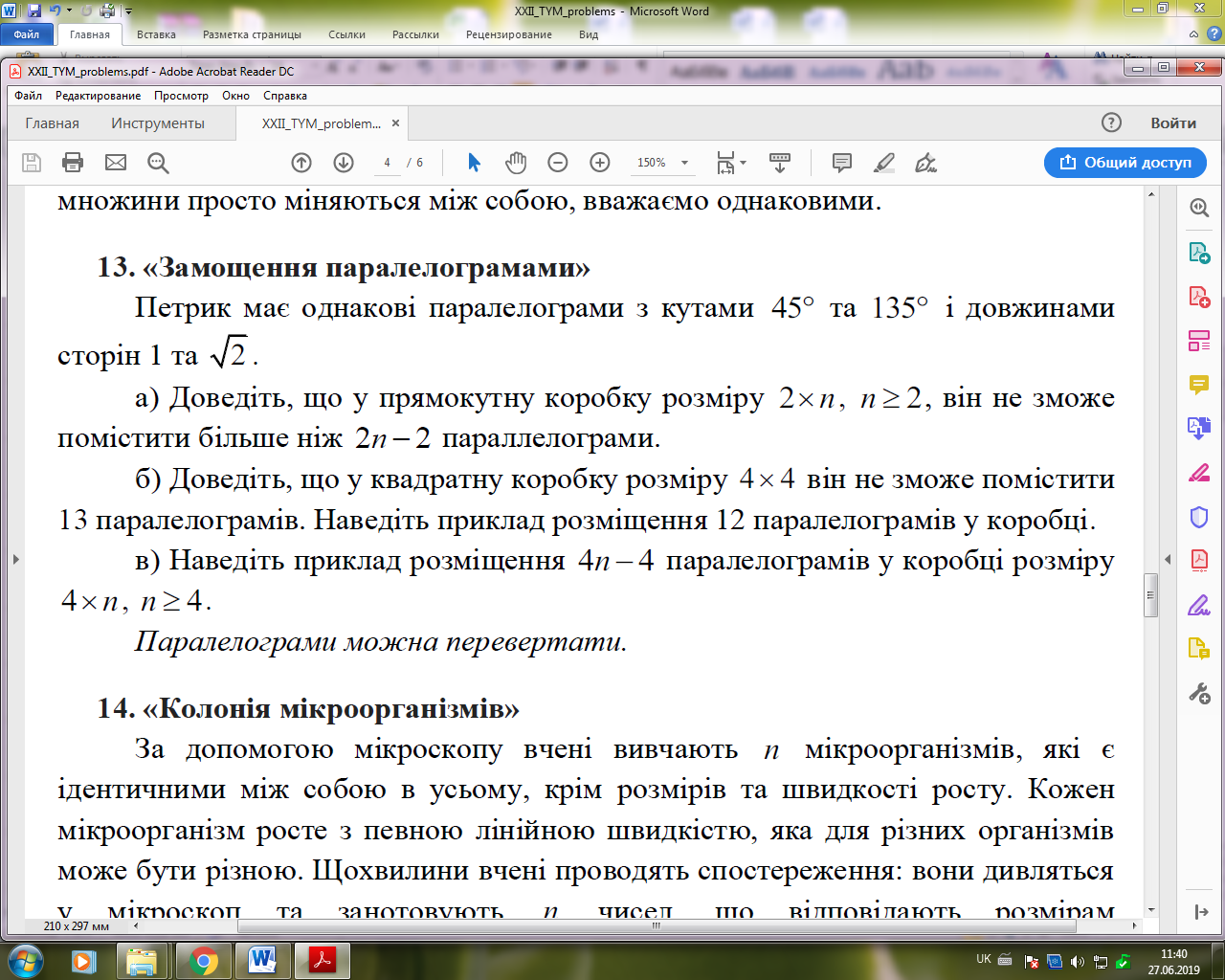
а) *AD* є бісектрисою;

б) *AD* є медіаною.

1. «Характеризація ортоцентра»

На висоті *AH1* гострокутного нерівнобедреного трикутника *ABC* з попарно різними сторонами вибрали деяку точку *X* , з якої на сторони *AB* та *AC* опустили перпендикуляри *XN* та *XM* відповідно. Виявилося, що *H1A* - бісектриса кута *MH1N*. Доведіть, що *X* - точка перетину висот трикутника *ABC*.

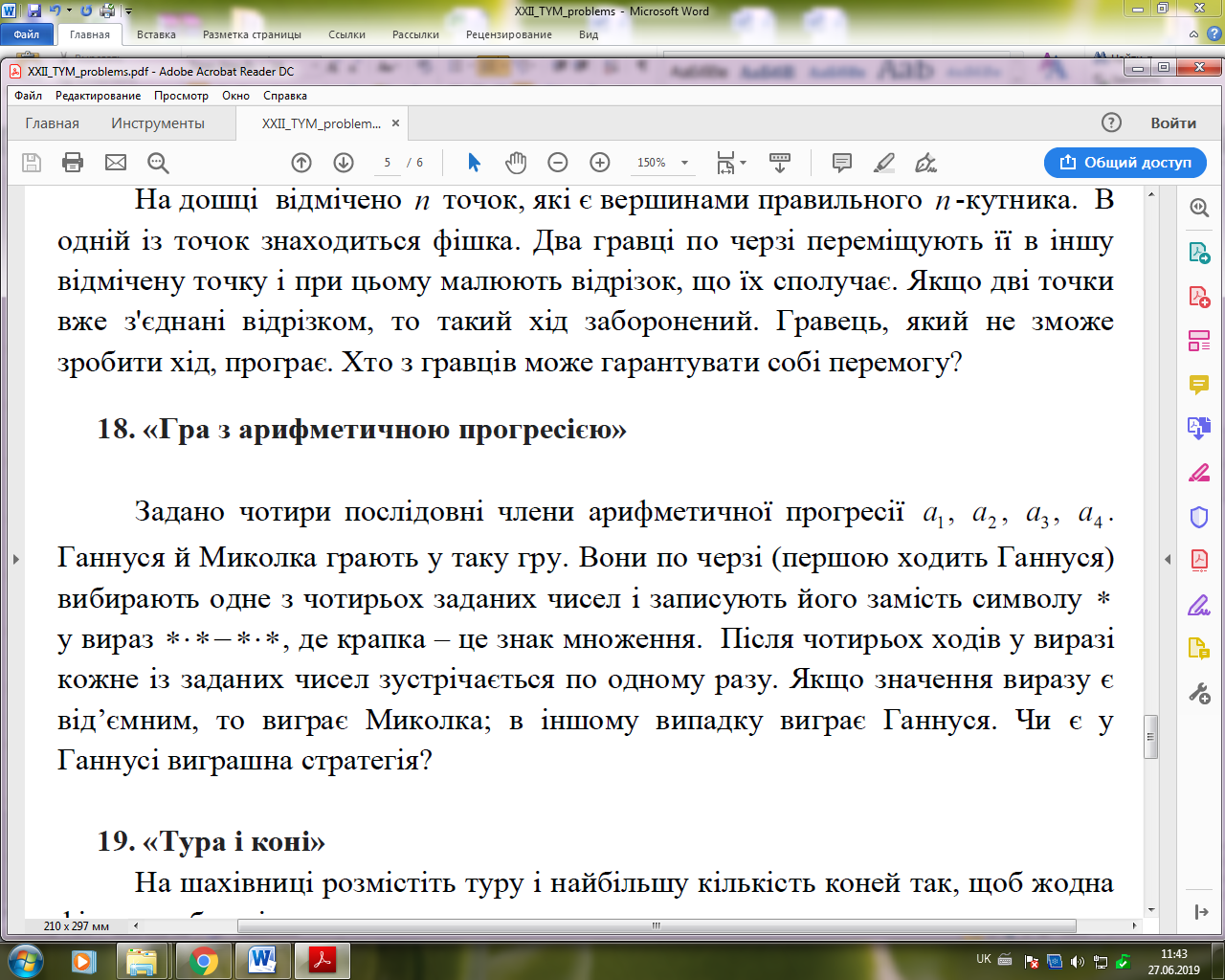
1. «Замощення паралелограмами»



15. «Архімед зважує злитки»

а) Цар Сиракуз Гієрон мав 6 золотих злитків. На вигляд злитки схожі, проте маси у них різні (однакових мас немає). Архімеду видали терези зі стрілкою і бирки з номерами від 1 до *n* . Гієрон наказав Архімеду зважити ці злитки й на кожний приклеїти бирку так, щоб номери йшли за зростанням мас. При цьому Архімеду видають злитки по одному й одразу після зважування й наклеювання бирки його забирають (тобто змінити бирку вже не можна). Проте дозволяється, щоб номери йшли не за порядком: наприклад, можна, щоби найлегший мав номер 3, другий за масою - 8 тощо. Для якого мінімального *n* Архімед може бути певен, що зуміє впоратись із завданням?

1. «Гра з арифметичною прогресією»



1. «Тура і коні»

На шахівниці розмістіть туру і найбільшу кількість коней так, щоб жодна

фігура не била іншу.

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:

В. М. Журавльов, Е. Г. Ейлазян, О. В. Зеленський, А. І. Казмерчук, Д. Коуклі, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, М. П. Мороз, Д. П. Мисак, О. Б. Панасенко, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, П. І. Самовол, О. К. Толпиго, Е. Й. Туркевич, І. В. Федак, А. М. Фролкін, Г. М. Шевченко.